1. Considere a experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda seguido da tiragem de uma carta de um baralho e observação do naipe. Considere a variável aleatória bidimensional (X, Y) em que X- resultado do lançamento da moeda $(face = 1; coroa = 0)$ e Y- naipe na carta $(copas = 1, ouros = 2, paus = 3 \ \ e \ espadas = 4)$. Defina o conjunto D_{XY} e determine a imagem inversa do ponto $(1, 3) \subset \mathbb{R}^2$ e a imagem do acontecimento saída de coroa e copas $\subset \Omega$.
2. Se $a < b$ e $c < d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $F_{X,Y}(x, y)$ é função distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y prove, usando as propriedades da função distribuição conjunta, que $F_{X,Y}(a, c) \leq F_{X,Y}(b, d)$.
3. Se $a < b$ e $c < d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $F_{X,Y}(x, y)$ é função distribuição conjunta da variável aleatória bidimensional discreta (X, Y), determine a expressão de cálculo de $P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$ em função de $F_{X,Y}(x, y)$.
4. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta tal que $D_X = \{1, \cdots, 5\}$, $D_Y = \{0,1,2\}$. A $P(X \leq 5) = 1$. Diga justificando se a afirmação é verdadeira ou falsa.
5. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta tais que $D_X = \{1, \cdots, 5\}$, $D_Y = \{0,1,2\}$. Escreva a expressão de cálculo da $P(Y = 0|X = 2)$. Se se verificar $P(Y = 0|X = 2) = P(Y = 0)$ o que pode concluir sobre a independência de $X \ e \ Y$. Justifique.
6. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com $D_{X,Y} = \{(x, y): x = 1, 2, 3; y = 1,2\}$. Defina função probabilidade conjunta e funções de probabilidade marginais de X e Y .
7. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com $D_{X,Y} = \{(x, y): x = 1, 2, 3; y = 1,2\}$ e função probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$. Se $P(X \leq x|Y = y) = P(X \leq x)$ o que pode concluir sobre a independência das variáveis aleatórias X e Y. Justifique.

8. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional.
   Se $F_{X,Y}(5, 3) = 1$ então $F_{XY}(4,3) \leq 1$. Diga se a afirmação é verdadeira ou falsa e Justifique, com recurso a um gráficos, sem esquecer de referir o caso em que se verifica a igualdade.
9. Seja $(X, Y\ )$uma variável aleatória bidimensional.
   Se $F_{X,Y}(3, 5) = 1,$ então $F_{X,Y}(2,1) \leq 1$. Diga se a afirmação é verdadeira ou falsa. Justifique, com recurso a um gráfico.
10. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional.
    Se $F_{X,Y}(5, 3) = 1$ então $F_{XY}(5,2) \leq 1$. Diga se a afirmação é verdadeira ou falsa e Justifique, com recurso a um gráficos.
11. Considere a variável aleatória bidimensional (X, Y) discreta com $D_{X,Y} = \{(x, y): x = 0, 1, 2; y = 0, 1\}$ e função probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$. Escreva a expressão das funções probabilidade e distribuição marginais de X e Y? Interprete.
12. Considere a variável aleatória bidimensional (X, Y) discreta $D_{X,Y} = \{x = 1, 2, 3,4;\ y = 0, 1, 2,3\}$ e função probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$. Qual a expressão da função probabilidade marginal de Y condicionada por $X = 3$? Qual o valor da $P(Y \leq 3)$? Justifique.
13. Considere a variável aleatória bidimensional (X, Y) discreta com $D_{X,Y} = \{x = 1, 2, 3,4; y = 0, 1, 2,3\}$ e função probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$. Qual a expressão da função probabilidade de X condicionada por $Y = 1$? Qual o valor da $P(X \leq 4)$? Justifique.
14. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com $D_{X,Y} = \{(x, y): x = 0, 1, 2, 3; y = 0,1\}$ e função probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$. Escreva a expressão de cálculo de $P(1 < X \leq 3|Y = 0)$.
15. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta. Qual a condição que garante que as variáveis aleatórias X e Y são independentes.
16. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, as variáveis X^2 e $Ln(Y)$ também o são? Justifique.
17. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta. Defina o conjunto $D_{X,Y}$.

18. 18. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função densidade probabilidade $f_{X,Y}(x, y) \quad (a < x < b; c < y < d)$. A partir de $f_{X,Y}(x, y)$ mostre como calcularia as funções densidade de probabilidade marginais de X e Y.
19. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função densidade probabilidade $f_{X,Y}(x, y) > 0 \quad (a < x < b; c < y < d)$. A partir de $f_{X,Y}(x, y)$ mostre como calcularia a função densidade de probabilidade de X condicionada por Y.
20. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função densidade probabilidade $f_{X,Y}(x, y) > 0 \quad (a < x < b; c < y < d)$. A partir de $f_{X,Y}(x, y)$ mostre como calcularia a função densidade de probabilidade de Y condicionada por X.
21. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função densidade probabilidade $f_{X,Y}(x, y) > 0 \quad (a < x < b; c < y < d)$. Se $P(X \leq x | Y = y) = P(X \leq x)$ o que pode concluir sobre a independência das variáveis aleatórias X e Y. Justifique.
22. Mostre, **usando a definição** de valor esperado de uma função de X, que se $\psi(X) = \alpha X$, o $E[\psi(X)]$=$\alpha E(X)$. α é uma constante.
23. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função densidade probabilidade $f_{X,Y}(x, y) > 0 \quad (a < x < b; c < y < e)$. A partir de $f_{X,Y}(x, y)$ escreva a expressão de cálculo de $P(k < X \leq w | Y = d)\ com \quad a < k < w < b$.
24. Seja a experiência aleatória lançamento de um dado seguido do lançamento de uma moeda e a variável aleatória (X, Y) em que X representa o número saído no dado e Y o resultado do lançamento da moeda ($Y = 1$ se sair face e $Y = 0$ se sair coroa). Escreva a expressão do momento de ordem 1+1 em relação à origem.

25. Seja a experiência aleatória lançamento de um dado seguido do lançamento de uma moeda e a variável aleatória (X, Y) em que X representa o número saído no dado e Y o resultado do lançamento da moeda ($Y = 1$ se sair face e $Y = 0$ se sair coroa) . Escreva a expressão do momento de ordem 2+0 em relação à origem.
26. Seja a experiência aleatória lançamento de um dado seguido do lançamento de uma moeda e a variável aleatória (X, Y). X representa o número saído no dado e Y o resultado do lançamento da moeda [$Y = 0$ se coroa, $Y = 1$ se face]. Escreva a expressão do momento de ordem 0+2 em relação à origem.
27. Seja a experiência aleatória lançamento de um dado seguido do lançamento de uma moeda e a variável aleatória (X, Y). X representa o número saído no dado e Y o resultado do lançamento da moeda [$Y = 0$ se coroa, $Y = 1$ se face]. Escreva a expressão do momento de ordem 1+1 em relação à média.
28. Seja a experiência aleatória lançamento de um dado seguido do lançamento de uma moeda e a variável aleatória (X, Y). X representa o número saído no dado e Y o resultado do lançamento da moeda. Escreva a expressão do momento de ordem 2+0 em relação à média.
29. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função densidade de probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ e funções densidade de probabilidade marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Se X, Y forem independentes e existirem $E(X)$ e $E(Y)$, mostre que $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.
30. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função densidade de probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ e funções densidade de probabilidade marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Partindo da fórmula prática de cálculo da covariância entre X e Y, mostre que se as variáveis aleatórias X e Y são independentes, a covariância entre X e Y é nula.

31. Se o coeficiente de correlação linear entre X e Y é positivo qual a informação que ele nos dá acerca da associação existente entre as variáveis X e Y? Justifique.
32. Se o coeficiente de correlação linear entre X e Y é nulo pode concluir-se que não existe associação entre X e Y? Justifique.
33. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com função probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ e funções probabilidade marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Se X, Y forem independentes e existirem $E(X)$ e $E(Y)$, prove que $Cov(X.Y) = 0$.
34. Comente, justificando convenientemente, a seguinte frase: "independência implica ausência de correlação linear, mas a recíproca não é verdadeira".
35. Mostre que se X e Y não são independentes e $\rho_{X,Y} > 0$, então a variância da soma $(X + Y)$ é maior que a soma das variâncias de X e Y.
36. Mostre que se X e Y não são independentes e $\rho_{X,Y} > 0$, então a variância da diferença $(X - Y)$ é inferior à soma das variâncias de X e Y.
37. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta. O valor esperado de X condicionado por Y é sempre o mesmo qualquer que seja o valor assumido pela variável aleatória Y no seu domínio? Justifique.
38. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com função probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ e funções probabilidade marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Prove que se X, Y são independentes, o valor esperado de X condicionado por Y é o mesmo qualquer que seja o valor assumido pela variável aleatória Y, no seu domínio.

39. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com função probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ e funções probabilidade marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Prove que se X, Y são independentes se tem $E(X.Y) = E(X).E(Y)$